CHUTE LIBRE VERTICALE

On lance, vers le haut, un balle de masse m = 50 g, à partir d'une hauteur z_0 = 1,5 m, avec une vitesse dont la composante verticale initiale vaut v_{0z}= 2,0 m.s^{-1}.
L'axe des ordonnées est orienté vers le haut. L'origine de l'axe vertical se situe au niveau du sol.

1)À l'aide de la deuxième loi de Newton, trouver la valeur de la composante verticale de l'accélération, a_z.

2)En déduire l'expression de la composante verticale de la vitesse, v_z.

3)En déduire l'expression de la composante verticale de la position, z.

4)Trouver à quelle date, notée t_{max}, l'altitude maximale est atteinte.

5)Trouver la valeur de l'attitude maximale z_{max}.

6)Calculer la date, notée t_s, à laquelle la balle touche le sol.

Correction :
1) Système : {balle}
Référentiel : terrestre considéré comme galiléen,
Forces : poids, poussée d'Archimède et frottements négligeables devant le poids, $\frac{d\vec{p}_G}{dt}=\sum \vec{F}_{ext}$. Comme la masse du système est constante, $\frac{d\vec{p}_G}{dt}=\frac{d(m\times\vec{v}_G)}{dt}=m\times\frac{d(\vec{v}_G)}{dt}=m\times\vec{a}_G$. On obtient donc $m\times\vec{a}_G=\sum\vec{F}_{ext}$, d'où $\vec{a}_G=\frac{\sum\vec{F}_{ext}}{m}$.
La somme des forces se résumant au poids, on peut écrire : $\vec{a}_G=\frac{m\vec{g}}{m}=\vec{g}$ d'où $\vec{a}_G=\begin{pmatrix}a_{Gx}\\a_{Gz}\end{pmatrix}=\vec{g}=\begin{pmatrix}0\\-9{,}8\end{pmatrix}$ car l'axe vertical est orienté vers le haut. La projection sur la verticale donne $a_{G,z}$ = -9,8 m.s^{-2}.
2) L'accélération étant la dérivée de la vitesse, on peut écrire $a_z=\frac{dv_z}{dt}=-g=-9{,}8\,m.s^{-2}$. La composante verticale de la vitesse est donc la fonction dont la dérivée est – 9,8, d'où $v_z=-9{,}8\times t+k_1$. Pour trouver k_1, on utilise la condition initiale sur la vitesse, $v_z=-9{,}8\times 0+k_1=k_1$ et, comme $v_{0,z}$ = 2,0 m.s^{-1}, k_1 = 2,0 m.s^{-1}, d'où v_z = -9,8.t + 2,0.
3) La vitesse étant la dérivée de la position, on peut écrire, pour la cote z, $v_z=\frac{dz}{dt}=-9{,}8\times t+2{,}0$ d'où $z=-4{,}9\times t^2+2{,}0\times t+k_2$. Pour trouver k_2, on utilise la condition initiale sur z : $z(0)=-4{,}9\times 0^2+2{,}0\times 0+k_2=k_2$. Or, z_0 = 1,5 m, donc k_1 = 1,5 m, d'où $z=-4{,}9\times t^2+2{,}0\times t+1{,}5$.
4) L'altitude maximale est atteinte lorsque la composante verticale de la vitesse est nulle : v_z (t_{max})= -9,8.t_{max} + 2,0 = 0, d'où t_{max} = 2,0 / 9,8 = 0,20 s.
5) Pour trouver l'altitude maximale de z, remplaçons t par t_{max}, z(t_{max}) = -4,9.(0,20)^2 +

2,0.0,20+1,5 = 1,7 m.
6) La cote du sol est z = 0, il faut donc trouver la date qui vérifie z(ts) = 0. Il faut donc résoudre $-4{,}9.ts^2 +2{,}0.ts +1{,}5 = 0$. On obtient deux solutions de signes opposés, on ne garde que la positive : ts = 0,79 s.