COMMENT TROUVER LA VITESSE CONNAISSANT L'ACCÉLÉRATION ET LA VITESSE INITIALE ?

Prenons un exemple. On sait que l'accélération d'un système est $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\-9,8\end{pmatrix}$ et que la vitesse du système, à t = 0, est $\vec{v}_0=\begin{pmatrix}1,2\\1,8\end{pmatrix}$. C'est la condition initiale sur la vitesse.

Question : trouver les expressions des composantes de la vitesse en fonction du temps $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_x(t)\\v_y(t)\end{pmatrix}$.

Réponse : utilisons la relation générale $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$ en la décomposant sur les deux composantes.

- commençons par v_x. On a la relation entre a_x et v_x : $a_x=\frac{dv_x}{dt}$. v_x est donc la fonction qui, lorsqu'on la dérive par rapport au temps, donne a_x. Comme a_x = 0, c'est que $\frac{dv_x}{dt}=0$ et la fonction dont la dérivée est nulle est la fonction constante. Donc $v_x = k_1$. Comment trouver la valeur de la constante k_1 ? En utilisant la condition initiale sur v_x, que l'on lit sur le vecteur $\vec{v}_0=\begin{pmatrix}1,2\\1,8\end{pmatrix}$, $v_{0,x}$ = 1,2 m.s^{-1}. Donc v_x (t) = 1,2 est la composante horizontale de la vitesse.

- passons à v_y. Comme pour la composante horizontale, nous écrivons pour la composante verticale $a_y=\frac{dv_y}{dt}$, d'où l'égalité : $\frac{dv_y}{dt}=-9,8$. La fonction dont la dérivée par rapport au temps donne -9,8 est $v_y(t) = -9,8.t+k_2$, k_2 étant une constante qui s'annule lors de la dérivation. Comment trouver la valeur de k_2 ? En utilisant la condition initiale sur la composante verticale du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0=\begin{pmatrix}1,2\\1,8\end{pmatrix}$, $v_{y,0}$ = 1,8 m.s^{-1}. En effet, si on remplace t par 0 dans $v_y(t)$, on obtient $v_y(0)=-9,8\text{x}0+k_2 = k_2 = v_{y,0}$ = 1,8, d'où k_2 = 1,8. En résumé : $v_y(t) = -9,8.t + 1,8$.

La vitesse s'écrit donc $\vec{v}=\begin{pmatrix}1,2\\-9,8\times t+1,8\end{pmatrix}$ et, si on la dérive, on obtient bien l'accélération.