MESURES ET INCERTITUDES

Ce document est un support servant pour la formation de professeurs de physique chimie. Un article contenant des justifications et des exemples et en préparation pour le BUP.

I. Définitions

1. Mesurage

Un mesurage a pour but de déterminer la valeur vraie d'une grandeur (le mesurande). Le résultat (la mesure) est significatif si la valeur donnée est suffisamment proche de la valeur vraie (ou valeur conventionnellement vraie). On appelle erreur de mesure la différence entre une valeur mesurée et la valeur vraie.

2. Résolution

La résolution d'une méthode de mesure correspond à la variation minimale qu'il faut imposer à la grandeur mesurée pour obtenir une variation *significative* du résultat de mesure (c'est-à-dire supérieure aux écarts aléatoires de répétabilité).

3. Dispersion. Fidélité

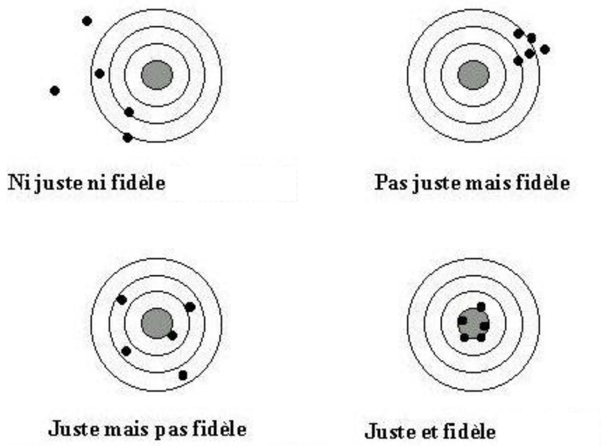
La fidélité est l'aptitude d'un instrument à donner, dans des conditions déterminées, des réponses très voisines lors de mesurages répétés de la même valeur (faible dispersion).
Selon les conditions, on distingue deux types de fidélité :

- répétabilité : les mesurages sont effectués par la même personne, dans un même lieu, avec le même appareil et dans un court laps de temps ;
- reproductibilité : les mesurages sont effectués dans des conditions différentes (cas des différents élèves d'une classe).

4. Erreur systématique. Justesse

L'erreur systématique est la composante de l'erreur de mesure qui reste constante ou varie de façon prévisible (défaut d'étalonnage, réglage de zéro, dérive temporelle, temps de réponse, erreur de parallaxe, erreur d'échantillonnage, approximation injustifiée, perturbation due à l'instrument, grandeurs d'influence...).
Elle ne peut pas être réduite en augmentant le nombre de mesurages.

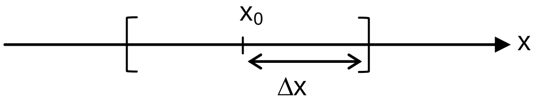
La justesse est l'aptitude d'un instrument à donner des indications exemptes d'erreurs systématiques.



5. Incertitude

L'incertitude *absolue* donne une indication de la dispersion des mesures. Elle correspond à l'intervalle contenant très probablement la valeur vraie x_v de la grandeur mesurée (intervalle de confiance). Elle se note Δx ou U et possède la même unité que la grandeur x.
Si x_0 est la valeur conventionnellement vraie, le résultat de la mesure s'écrit : $\mathbf{x = x_0 \pm \Delta x}$.

Cela signifie qu'il existe une certaine probabilité (niveau de confiance) que $x_0 - \Delta x < x_v < x_0 + \Delta x$



L'incertitude *relative* est le rapport $\frac{\Delta x}{x_0}$. Sans dimension, on la donne souvent en %.

Elle donne une indication de la précision du mesurage.

Attention à ne pas confondre erreur de mesure et incertitude de mesure.

II. Statistiques

1. Population et échantillon

La population est l'ensemble des mesures possibles (il est souvent infini).
L'échantillon est l'ensemble des mesures effectuées, à partir duquel on espère tirer des informations sur la population (l'échantillon doit être *représentatif* de la population).

2. Moyenne, variance et écart type de population

Taille = nombre de mesures

Moyenne ou espérance mathématique m = E(X) = $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum x_i$

Médiane = valeur située au milieu de l'ensemble des mesures lorsqu'elles ont été ordonnées

Variance V(X) = $\frac{1}{n}\sum (x_i - m)^2$ (moyenne des écarts quadratiques)

Ecart-type σ(X) = $\sqrt{V(X)}$

Etendue = valeur maximale - valeur minimale

Coefficient de variation (ou écart-type relatif RSD) CV = $\frac{\sigma}{m}$

3. Distribution d'un échantillon

- effectif et probabilité : construction d'un histogramme (série de mesures et tirage de dés)

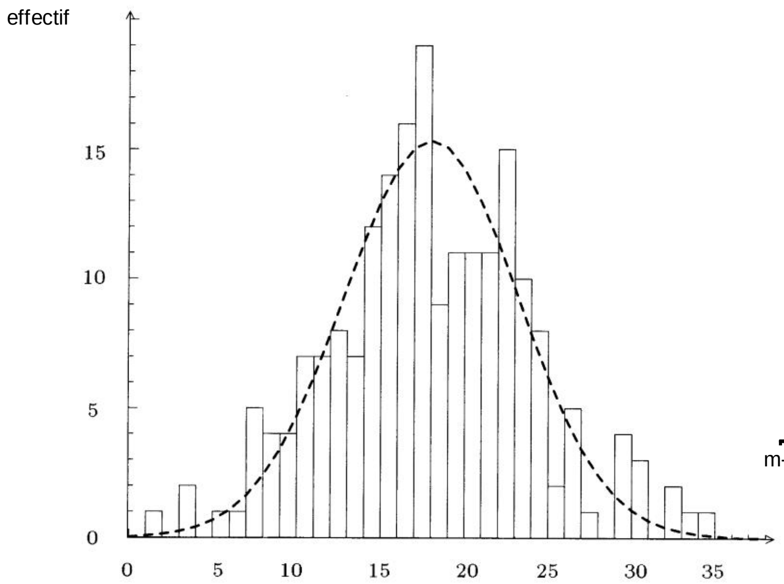
Une valeur mesurée est une des valeurs d'une variable aléatoire, dont on cherche à connaître la distribution.

Résultat de mesure = valeur vraie (inconnue) + erreur aléatoire + erreur systématique

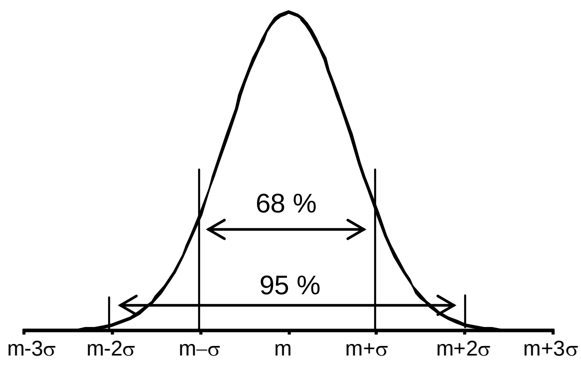
Déterminer l'incertitude du processus de mesure revient à donner la forme et la largeur de cette distribution.

- <u>Théorème central limite</u> (Gauss : 1777-1855) :

Lorsque les causes d'incertitudes sont nombreuses, indépendantes, et donnent des erreurs du même ordre de grandeur, l'*histogramme de répartition* de la série de mesures tend vers une courbe de Gauss lorsque le nombre n de mesures tend vers l'infini.



$$Gauss(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



La loi normale n'est caractérisée que par deux paramètres m et σ appelés respectivement *moyenne* (indiquant la valeur centrale) et *écart-type* (indiquant la largeur de la courbe).

Si la variable X suit une loi normale, 68 % des valeurs de X sont comprises dans l'intervalle [m-σ ; m+σ], et 95 % des valeurs sont comprises dans l'intervalle [m-2σ ; m+2σ].

Le calcul d'incertitudes consiste à estimer, en supposant que la distribution est gaussienne, sa moyenne et son écart-type à partir des résultats d'une série de mesures. La valeur recherchée (valeur « conventionnellement » vraie) est estimée par la moyenne des résultats à condition que le processus de mesure soit exempt d'erreurs systématiques.

III. Correction des erreurs systématiques

On distingue l'erreur systématique, que l'on peut prévoir et corriger, de l'erreur grossière (faute) due à une mauvaise manipulation de l'opérateur. Cette dernière devra être détectée et éliminée (voir tests d'hypothèse).

1. Calibrage de l'instrument de mesure grâce à des étalons

Une erreur constante sera corrigée par mesure d'un "blanc", une erreur variable doit être corrigée par un calibrage : on réalise toute la méthode de mesure sur un ou plusieurs objets connus.

On peut alors :
- régler l'appareil pour qu'il donne "en moyenne" directement la valeur vraie des étalons ;
- tracer une courbe d'étalonnage avec éventuellement un calcul de régression, elle-même sujette à incertitudes. Celle-ci permettra de calculer une correction à effectuer aux résultats des mesures.

2. Validation et carte de contrôle

Dans l'industrie, les normes de contrôle qualité imposent une vérification régulière du matériel par passage d'étalons de référence, avant et après la série de mesures effectuées (suivi de l'appareil par carte de contrôle). La certification dépendra des résultats du laboratoire à un certain nombre de tests montrant l'absence d'erreurs systématiques et des incertitudes conformes à la tolérance fournie.

IV. Analyse statistique d'une série de mesures

C'est la méthode la plus simple à utiliser avec des élèves, en récoltant l'ensemble de leurs résultats.
On suppose que la mesure suit une loi normale, c'est-à-dire qu'elle répond aux conditions du théorème central limite.

1. Calcul de l'incertitude-type par étude statistique (type A)

L'incertitude-type correspond à un écart-type, donc est lié à une probabilité de 68%.

a) premier cas : l'écart-type est connu

(évalué par un très grand nombre de mesures préalables)

Si on fait un seul mesurage, on prend comme incertitude-type l'écart-type connu.
Si on fait une série de mesurage, on montre que, en l'absence d'erreurs systématiques, la moyenne des mesures de la série tend vers la moyenne de la population (considérée comme la valeur vraie).
En faisant la moyenne des résultats, on améliore la précision, et l'incertitude-type sur la moyenne vaut :

$$\boxed{u_A = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Cette méthode (norme ISO 5725) est utilisée dans un laboratoire professionnel lorsqu'il utilise une méthode normalisée et qu'il a participé à une série d'essais inter-laboratoires. Il est tout à fait possible, dans un exercice ou une activité expérimentale, de donner aux élèves l'écart-type de la méthode (connu ou supposé connu) et leur demander de calculer l'incertitude.

b) deuxième cas : l'écart-type réel n'est pas connu *(cas le plus courant)*

- la moyenne des mesures de la série tend vers la moyenne de la population
- l'écart-type de la série de mesures présente un biais par rapport à celui de la population ; pour avoir un écart-type sans biais, il faut prendre

$$\boxed{s = \sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - m)^2}{n-1}}}$$

estimateur sans biais, correspondant à (n-1) degrés de libertés.

L'incertitude-type sur la moyenne vaut $u_A = \frac{s}{\sqrt{n}}$.

2. Incertitude élargie

L'incertitude totale est égale à l'incertitude-type multipliée par un facteur d'élargissement k dépendant du niveau de confiance choisi : $U = k \times u$
L'incertitude est définie comme étant l'intervalle qui a un certain pourcentage de chance (appelé niveau ou taux de confiance β) de contenir la valeur vraie de la mesure (les erreurs systématiques ayant été corrigées).
L'intervalle de confiance est alors $[m – U ; m + U]$.

a) premier cas : l'écart-type est connu

La théorie de la loi normale indique qu'au taux de confiance de 95 %, le facteur d'élargissement vaut 1,96.
La norme ISO de contrôle qualité préconise un facteur k = 2.

b) deuxième cas : écart-type estimé

On prend alors un facteur égal au coefficient de Student t_β dépendant de β et de n :

nombre de mesures	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	30
degrés de liberté	1	2	3	4	5	6	7	9	11	14	29
t à 95%	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,26	2,20	2,14	2,05
t à 99 %	63,7	9,92	5,8	4,60	4,03	3,71	3,50	3,25	3,11	2,98	2,77

Remarque : on voit que plus le niveau de confiance est grand, plus l'incertitude est grande, car on diminue le risque que la valeur vraie soit située hors de l'intervalle de confiance.

Attention : si on ne fait qu'une seule fois la mesure, on peut prendre comme écart-type celui déterminé auparavant dans une série de mesures identiques, mais on calculera l'incertitude finale avec n = 1.

3. Ecriture du résultat

Le résultat de la série de mesures s'écrit $x = (x_0 \pm \Delta x)$ unités, où $x_0 = m$ et $\Delta x = U$

Chiffres significatifs

Les chiffres significatifs d'une valeur numérique sont les chiffres qui suivent le premier chiffre différent de 0. Exemple : dans 0,00120, seuls 1, 2 et 0 sont significatifs, les autres dépendent de la notation choisie. Pour éviter toute ambiguïté, il suffit d'écrire le nombre en notation scientifique ($1{,}20.10^{-3}$) et de compter les chiffres.

La norme préconise de garder deux chiffres significatifs pour l'incertitude absolue (un seul chiffre dans les consignes officielles de l'inspection générale), et on écrit le résultat avec le même nombre de chiffres après la virgule.

Exemple : si $x = 1{,}0124.10^{-3}$ et $\Delta x = 4{,}86.10^{-5}$, le résultat s'écrira $(1{,}012 \pm 0{,}049).10^{-3}$,
ou bien $(1{,}01 \pm 0{,}05).10^{-3}$

Remarque 1 : afin d'éviter les erreurs d'arrondis, on n'arrondira que le résultat final.

Remarque 2 : méfions-nous des "règles" de nombres de chiffres : 0,99 et 1,01 n'ont pas le même nombre de chiffres significatifs. Pourtant, si on suppose une incertitude de 0,5 sur le dernier chiffre, il donne tous deux une incertitude relative de 0,5 %…

V. par analyse des causes d'erreurs

C'est la méthode préconisée dans le *guide pour l'expression de l'incertitude de mesure* (GUM).

1. Incertitudes-types de chaque source d'incertitude

Les différentes incertitudes-types sont calculées à partir des différentes causes d'erreurs aléatoires :
- résolution (graduation ou digit)
- tolérance constructeur
- incertitude de l'étalon
- grandeurs d'influence (température, hygrométrie…)
- échantillonnage

Afin de faire correspondre ces tolérances à l'écart-type, on doit recalculer les incertitudes-types (type B) :

- pour une distribution équiprobable sur l'intervalle de tolérance, on prend $u_B = \dfrac{\text{demi-intervalle}}{\sqrt{3}}$;

- pour une distribution normale (étalon commercial), on prend $u_B = \dfrac{incertitude}{3}$

L'application de cette méthode seule impose de faire une liste complète des sources d'erreurs, on prenant garde à ne pas compter plusieurs fois certaines erreurs, et de connaître le modèle mathématique qui lie ces causes au résultat global. Certaines incertitudes-types peuvent être déterminées par une analyse statistique (type A), d'autres par une méthode de type B.

2. Incertitude-type composée

Si une grandeur z est calculée à partir de plusieurs grandeurs indépendantes x_i :

$z = f(x_1, x_{2, \ldots,} x_n)$ alors $\sigma_z = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}{}^2}$ (relation valable avec les incertitudes-types)

exemples : $z = a\,x + b\,y$ $\qquad \sigma_z = \sqrt{a^2 \sigma_x{}^2 + b^2 \sigma_y{}^2}$

$z = k\,y$ ou $k\frac{x}{y}$ $\qquad \frac{\sigma_z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$

L'incertitude étant proportionnelle à l'écart-type, ce calcul est identique pour le calcul d'une incertitude à partir de ces composantes.

Ce calcul est fait dans Regressi si on choisit dans les options "calcul d'incertitudes avec variances". On peut également utiliser l'excellent logiciel libre GUM_MC.

Exemples : concentration par dosage volumétrique ; distance focale par loi de conjugaison ; résistance par tension et intensité…

3. Incertitude élargie

Le fait de composer plusieurs sources d'erreurs indépendantes (dont la distribution n'est pas forcément gaussienne) permet de rentrer dans le cadre du théorème central limite : le résultat global de la mesure s'approche d'une loi normale, donc on peut calculer l'incertitude élargie : $U = 2 \times u_c$ pour un niveau de confiance de 95 %.

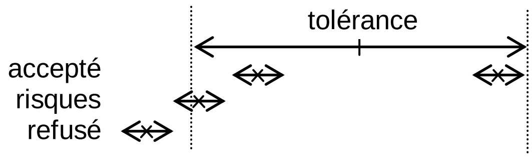
Remarque 1 : ça n'a aucun sens de calculer, comme on le voit souvent, l'incertitude élargie sur une distribution rectangulaire.

Remarque 2 : cette méthode est intéressante car elle permet de comparer le poids de chacune des sources d'erreur, mais elle est longue et complexe, et il sera impossible de l'utiliser à chaque TP.

VI. Critères de validation

1. Utilisation dans les laboratoires industriels

Le calcul de l'incertitude dans un laboratoire (avec un facteur d'élargissement égal à 2) permet de définir les tolérances de conformité des produits : la tolérance correspondant aux vérifications des lots doit être inférieure à celle donnée au client.



Dans la zone intermédiaire, le refus est risqué (risque de première espèce : rejeter un lot conforme) et l'acceptation aussi (risque de deuxième espèce : accepter un lot non conforme).

On utilise également la notion de *capabilité* du processus de mesure qui est égale au rapport entre la tolérance et l'incertitude. Celle-ci doit être au moins égale à 3 pour que le processus de mesure soit viable.

2. Comparaison rapide de deux résultats

On amesuré une même grandeur par deux méthodes, ou bien on veut déterminer si deux échantillons proviennent de la même population. La question qu'on se pose est : "les deux mesures sont-elles identiques ?" Dans une première approche, il suffit de regarder si les intervalles de confiance se recouvrent.

Exemple : on mesure par deux méthodes la concentration de la même solution, et on trouve d'une part 1,01 ± 0,05 et d'autre part 0,95 ± 0,03 (au même niveau de confiance) : les deux valeurs sont compatibles car elles ont un intervalle commun [0,96 ; 0,98].

3. Tests d'hypothèses

Ils consistent à poser une question, du type : "les deux moyennes sont-elles identiques ?" (*hypothèse nulle*) ou bien "y en a-t-il une plus grande que l'autre ?".
Pour répondre à la question, on construit un paramètre à partir des résultats statistiques, et on compare ce paramètre à une loi tabulée.

a) Comparaison d'une moyenne avec une valeur théorique : test t (Student)

On calcule $t = \frac{|m - x_v|}{s}\sqrt{n}$. Si cette valeur est inférieure au coefficient de Student correspondant (pour n-1 degrés de libertés), on peut accepter l'hypothèse d'égalité des deux valeurs.

b) Test de rejet de valeurs aberrantes : test Q (Dixon)

On calcule

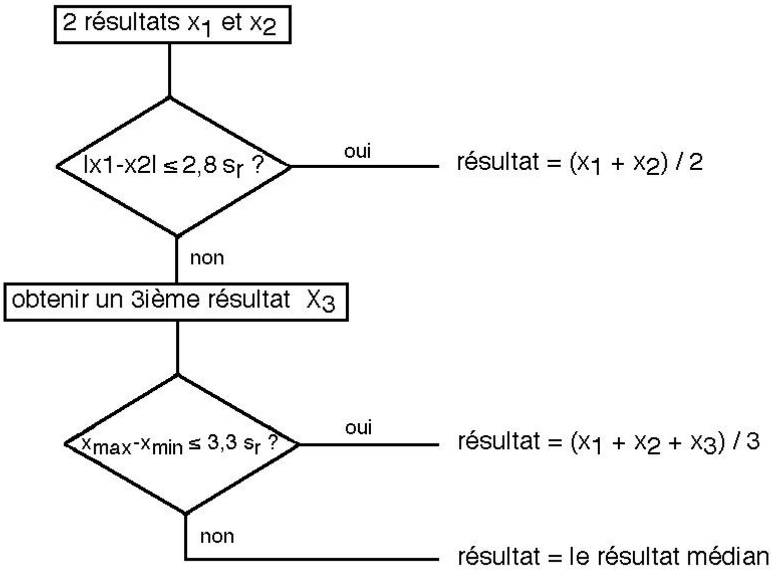
$$Q = \frac{|\text{valeur suspectée - valeur la plus proche}|}{\text{valeur la plus grande - valeur la plus petite}}$$

Si cette valeur est inférieure à la valeur critique tabulée, on peut accepter cette mesure.
Puis on refait le test sur les autres mesures.

nombre de mesures	niveau de confiance bilatéral	
n	**95 %**	**99 %**
3	0,94	0,99
4	0,77	0,89
5	0,64	0,78
6	0,56	0,70
7	0,51	0,64
8	0,47	0,59
9	0,44	0,59
10	0,41	0,53

c) Test de compatibilité de deux résultats successifs par la même méthode

C'est la méthode utilisée dans les laboratoires dans les cas où la méthode est bien connue (écart-type de répétabilité s_r donné), lorsqu'on ne peut pas pratiquer un grand nombre de mesurages.
(méthode dérivée du test de Student)



VII. Conclusion

L'enseignement des incertitudes est très riche au niveau pédagogique : d'abord car il rappelle qu'une mesure n'est pas absolument exacte, et permet d'introduire le doute, indispensable en sciences. Surtout, il oblige à réfléchir au protocole utilisé, à condition de chercher des moyens de l'améliorer.
L'objectif de cet enseignement n'est pas d'ajouter des calculs pour le plaisir de résoudre des exercices (comme on le voit souvent dans les manuels scolaires), mais de pratiquer une démarche scientifique, parfois complexe, toujours pleine de sens.

Bibliographie

On peut trouver beaucoup de ressources sur
http://eduscol.education.fr/rnstl/mesure-instrumentation/mi_ressources
et sur http://www.udppc.asso.fr/national/index.php/documents-thematiques/metrologie

Cours sur les incertitudes

- http://eduscol.education.fr/rnstl/mesure-instrumentation/mi_ressources/evaluation_incertitude_mesure_unique
- Incertitudes de mesures : une approche normative (Dominique Barchiesi - BUP 864 de mai 2004) disponible gratuitement sur http://www.udppc.asso.fr/bupdoc/
- Chimie analytique (Skoog, West, Holler - DeBoeck Université)
- Analyse statistique de données expérimentales (Protassov - EDP sciences)
- Guide du technicien qualité (Boiteux – Delagrave)
- Incertitudes et analyses des erreurs dans les mesures physiques (John Taylor – Dunod)
- Traitement des mesures (Roger Journeaux – Ellipses) avec ses compléments sur http://www.cetice.u-psud.fr/complements/stats/r-journeaux.html
- 27 exemples d'évaluation d'incertitudes d'étalonnage (Collège Français de Métrologie)

Travail de base avec les élèves

- http://ww2.ac-poitiers.fr/sc_phys/IMG/pdf/LA_MESURE_AU_COLLEGE.pdf
- http://ww2.ac-poitiers.fr/sc_phys/spip.php?article323
- http://artic.ac-besancon.fr/reseau_stl/FTP_STL/Mesures%20et%20statistiques.pdf

Recommandations sur l'écriture d'un résultat et les chiffres significatifs

- http://www.educnet.education.fr/rnchimie/recom/mesures_incertitudes.pdf
- http://ead.univ-angers.fr/~capespc/physique/generalites/erreurs.pdf

Normes AFNOR

- http://www-physique.u-strasbg.fr/~udp/articles/Courssurlesincertitudes.pdf
- http://www.lne.fr/fr/services_ligne/popup-guides-documents/popup-guide-eurachem2.shtml

Logiciels de calculs

- http://jeanmarie.biansan.free.fr/gum_mc.html
- Regressi
- Les calculs peuvent être programmés sur Excel ou Calc